

**Corrigé de TD - Mécanique 1
(référentiels non galiléens)**

Exercice 1 : Chute d'un boulon dans un camion

Comme \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , on a $\vec{e}'_y = \vec{e}_y$ et $\vec{e}'_z = \vec{e}_z$ (mais $Oy \neq Oy'$ et $Oz \neq Oz'$).

1. Le camion est en translation rectiligne uniforme, caractérisé par \vec{v} ($O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}$) noté $V \vec{e}_x$.

(a) *Référentiel* : \mathcal{R}' lié au camion, en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} supposé galiléen donc \mathcal{R}' est supposé galiléen.

Système : boulon assimilé à un point matériel M .

Repère : cf figure de l'énoncé.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$.

$m \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P}$ d'où $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{g} = -g \vec{e}_y$.

En projection selon \vec{e}_x : $\ddot{x}' = 0 \Rightarrow \dot{x}' = C_1$.

En projection selon \vec{e}_y : $\ddot{y}' = -g \Rightarrow \dot{y}' = -gt + C_2$.

Détermination des constantes d'intégration C_1 et C_2 via la condition initiale $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$ à $t = 0$, d'où $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$. Conclusion : $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = -gt \vec{e}_y$.

On en déduit $\vec{OM} = (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$ (cf position initiale) soit $x' = C^{te}$: le boulon décrit une droite verticale dans \mathcal{R}' , en accord avec le principe de relativité galiléenne. On obtient le même mouvement qu'avec $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et une observation dans \mathcal{R} (question 1c).

(b) Dans le référentiel \mathcal{R} , la position du boulon se déduit de la façon suivante :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \Rightarrow \vec{OM} = Vt \vec{e}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$$

L'équation de la trajectoire est donc $y = -\frac{g}{2V^2}x^2 + h$: trajectoire parabolique dans \mathcal{R} .

Note: on pourrait aussi mener l'étude d'emblée dans \mathcal{R} : $m \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{P} = -mg \vec{e}_y$ d'où $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = -gt \vec{e}_y + V \vec{e}_x$ (en accord avec $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = -gt \vec{e}_y$ et la loi de composition des vitesses); on obtient alors bien $\vec{OM} = (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y + Vt \vec{e}_x$.

(c) Dans le cas de la chute d'une balle depuis un immeuble, on aurait $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$ à $t = 0$ d'où $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = -gt \vec{e}_y$ donnant $\vec{OM} = (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$ ie une droite verticale dans \mathcal{R} .

De plus, la loi de composition des vitesses $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}(O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ donne $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = -V \vec{e}_x - gt \vec{e}_y \Rightarrow \vec{O'M} = -Vt \vec{e}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$: trajectoire parabolique dans \mathcal{R}' ($y' = -\frac{g}{2V^2}x'^2 + h$).

2. Translation rectiligne uniformément accéléré, caractérisée par \vec{a} ($O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}$) noté $A \vec{e}_x$.

(a) *Référentiel* : \mathcal{R}' lié au camion, en translation rectiligne non uniforme par rapport à \mathcal{R} donc \mathcal{R}' est non galiléen. Par contre, $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ (translation).

L'accélération d'entraînement est donc $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = A \vec{e}_x$ et l'accélération de Coriolis est $\vec{a}_c = \vec{0}$.

Bilan des forces :

➤ poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$;

➤ force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{i,e} = -m\vec{a}_e \Rightarrow \vec{f}_{i,e} = -mA \vec{e}_x$;

➤ force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{i,c} = -m\vec{a}_c \Rightarrow \vec{f}_{i,c} = \vec{0}$.

Principe fondamental de la dynamique : $m \vec{a} (M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{f}_{i,e} + \vec{f}_{i,c}$: $\vec{a} (M/\mathcal{R}') = -g \vec{e}_y - A \vec{e}_x$

En projection selon \vec{e}_x : $\ddot{x}' = -A \Rightarrow \dot{x}' = -At + C_1 = -At$.

En projection selon \vec{e}_y : $\ddot{y}' = -g \Rightarrow \dot{y}' = -gt + C_2 = -gt$.

Conclusion : $\vec{v} (M/\mathcal{R}') = -At \vec{e}_x - gt \vec{e}_y$.

On en déduit $\vec{OM} = -\frac{1}{2}At^2 \vec{e}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$.

L'équation de la trajectoire est donc $y' = \frac{g}{A}x' + h$: droite de pente g/A dans \mathcal{R}' :

au fur et à mesure de la diminution de y' , on observe une diminution de x' dans les mêmes proportions, le boulon tombant vers l'arrière du point duquel il s'est détaché.

Rem: direct : $\vec{a}' = -g \vec{e}_y - A \vec{e}_x \triangleq \vec{g}_{\text{équiv}}$ avec $\vec{v}'(t=0) = \vec{0}$ d'où une trajectoire rectiligne selon $\vec{g}_{\text{équiv}}$...

(b) Dans le référentiel \mathcal{R} , la position du boulon se déduit de la façon suivante :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}At^2 \vec{e}_x - \frac{1}{2}At^2 \vec{e}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y = (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$$

soit $x = C^{te}$: la trajectoire est une droite verticale dans \mathcal{R} .

Note: on pourrait aussi mener l'étude d'emblée dans \mathcal{R} : $m \vec{a} (M/\mathcal{R}) = \vec{P} = -mg \vec{e}_y$.

Or, dans ce deuxième cas, $\vec{v} (M/\mathcal{R}) = \vec{0}$ à $t = 0$. Ainsi, $\vec{v} (M/\mathcal{R}) = -gt \vec{e}_y$.

On retrouve bien $\vec{OM} = (-\frac{1}{2}gt^2 + h) \vec{e}_y$ ie une chute libre dans \mathcal{R} : le boulot n'a aucune vitesse initiale horizontale dans ce cas, et tombe comme si le camion n'était pas présent.

Rem: en pratique, l'air contenu dans le camion est lui aussi mis en mouvement lors de l'accélération ; les forces de frottements auraient tendance à dévier le boulon légèrement vers l'avant, dans \mathcal{R} .

Exercice 2 : Oscillations sur une tige en rotation

1. Référentiel : \mathcal{R}' lié à la tige en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen. \mathcal{R}' est donc non galiléen. Mais $\vec{\omega} (\mathcal{R}'/\mathcal{R}_g) = \vec{\Omega} = C^{te}$ et $\vec{v} (O'/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$.
Système : point matériel M .

Forces :

➤ poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$

➤ réaction du support $\vec{R} \perp \vec{e}_x'$ (pas de frottement solide)

➤ force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x'$ où $\ell = x'$

➤ force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{i,e} = m\Omega^2 \vec{HM} = m\Omega^2 x' \vec{e}_x'$
(en coordonnées polaires : $\vec{f}_{i,e} = m\Omega^2 r \vec{e}_r$)

➤ force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{i,c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} (M/\mathcal{R}') = -2m\Omega \vec{e}_z \wedge \dot{x}' \vec{e}_x' : \vec{f}_{i,c} = -2m\dot{x}' \Omega \vec{e}_y'$$

$$(en\ coordonnées\ polaires : \vec{f}_{i,c} = -2m\Omega \vec{e}_z \wedge \dot{r} \vec{e}_r = -2m\dot{r} \Omega \vec{e}_\theta)$$

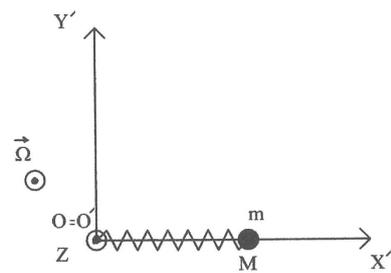
(dans le référentiel \mathcal{R}' lié à la tige, M ne peut se déplacer que selon l'axe $O'x'$)

$$\left(\left(\frac{d(x' \vec{e}_x')}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt} \vec{e}_x' \text{ car } \vec{e}_x' \text{ est fixe dans } \mathcal{R}' \right) \quad \left(\left(\frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r \text{ car } \vec{e}_r \text{ est fixe dans } \mathcal{R}' \right)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R} s'écrit :

$$m \vec{a} (M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{f}_{i,e} + \vec{f}_{i,c}$$

D'où par projection selon \vec{e}_x' : $m\ddot{x}' = -k(x' - \ell_0) + m\Omega^2 x'$ soit $\ddot{x}' + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \right) x' = \frac{k}{m} \ell_0$.



Rem: on pouvait aussi utiliser le TEM, avec $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 x'^2 \dots$

2. La solution générale de cette équation différentielle est $x'(t) = x'_h(t) + x'_p(t)$.

(a) Si $\frac{k}{m} > \Omega^2$: on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2$, $x'_p(t) = \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$ et on doit résoudre : $\ddot{x}'_h + \omega_0^2 x'_h = 0$.

La solution s'écrit : $x'(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$.

Or $x'(t=0) = x'_0 = A_1 + \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow A_1 = x'_0 - \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$.

De plus, $\dot{x}'(t) = -A_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + A_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

Or $\dot{x}'(t=0) = 0 = A_2 \omega_0 \Rightarrow A_2 = 0$.

Finalement, $x'(t) = \left(x'_0 - \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$: mouvement oscillant.

(b) Si $\frac{k}{m} < \Omega^2$: on pose $\omega_0^2 = \Omega^2 - \frac{k}{m}$, $x'_p(t) = -\frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$ et on doit résoudre : $\ddot{x}'_h - \omega_0^2 x'_h = 0$.

La solution s'écrit : $x'(t) = A_1 \cosh(\omega_0 t) + A_2 \sinh(\omega_0 t) - \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$.

Or $x'(t=0) = x'_0 = A_1 - \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow A_1 = x'_0 + \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$.

De plus, $\dot{x}'(t) = A_1 \omega_0 \sinh(\omega_0 t) + A_2 \omega_0 \cosh(\omega_0 t)$.

Or $\dot{x}'(t=0) = 0 = A_2 \omega_0 \Rightarrow A_2 = 0$.

Finalement, $x'(t) = \left(x'_0 + \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}\right) \cosh(\omega_0 t) - \frac{k\ell_0}{m\omega_0^2}$.

Le point matériel s'éloigne donc exponentiellement de O' ($\cosh(a) = \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{2}$).

(c) Si $\frac{k}{m} = \Omega^2$, on doit résoudre $\ddot{x}' = \frac{k}{m}\ell_0 = C^{te}$: $x' = \frac{k}{m}\ell_0 \frac{t^2}{2} + x'_0$.

Le mouvement de M est donc uniformément accéléré.

Rem: dans les deux derniers cas, l'équation différentielle du mouvement et l'analyse du mouvement restent valables tant que l'on se situe dans la zone de linéarité du ressort. Mais si l'allongement devient trop important, la force de rappel du ressort ne reste pas proportionnelle à celui-ci, et on peut même aboutir à la rupture du ressort.

3. Le cas où le point matériel reste immobile correspond à $\ddot{x}' = 0$. L'équation différentielle

précédente devient alors $(\frac{k}{m} - \Omega^2)x' = \frac{k}{m}\ell_0$ d'où $x' = \frac{k\ell_0}{k-m\Omega^2}$ ce qui est possible si $\frac{k}{m} > \Omega^2$ et

$x'_0 = \frac{k\ell_0}{k-m\Omega^2}$ (cas particulier du mouvement oscillant, avec une amplitude nulle).

4. On projette le principe fondamental de la dynamique sur les deux autres axes :

➤ selon \vec{e}'_y : $0 = R_y - 2m\Omega\dot{x}' \Rightarrow R_y = 2m\Omega\dot{x}'$

➤ selon \vec{e}'_z : $0 = R_z - mg \Rightarrow R_z = mg$

On a donc : $\vec{R} = m(2\Omega\dot{x}'\vec{e}'_y + g\vec{e}'_z)$

Rem: la force de Coriolis apparaît comme la force compensant la réaction de la tige selon \vec{e}'_y . Elle est nulle si M ne se déplace pas sur la tige. Mais si M s'éloigne du centre $O = O'$, il va se retrouver « plaqué » contre la tige, dans un sens s'opposant au mouvement de rotation. Dans le référentiel terrestre, c'est l'effet de son inertie, tandis que dans le référentiel lié à la tige, c'est l'effet de la force de Coriolis. De plus, si x' augmente, $\vec{f}_{i,c}$ est suivant $-\vec{e}'_y$ donc tend à dévier la trajectoire de M vers la droite dans le référentiel lié à la tige.

Exercice 3 : Pendule simple dans un train en accélération

1. Effectuons une étude dynamique dans le référentiel lié au train, non galiléen (car en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen).

Référentiel : \mathcal{R}' lié au train, en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen :

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}.$$

Système : point matériel M .

Repère : cf schéma ci-contre. *Note*: θ est orienté dans le sens direct autour de $(O'z')$ d'où l'orientation de \vec{u}_θ .

Bilan des forces :

➤ poids : $\vec{P} = mg \vec{u}_{x'}$;

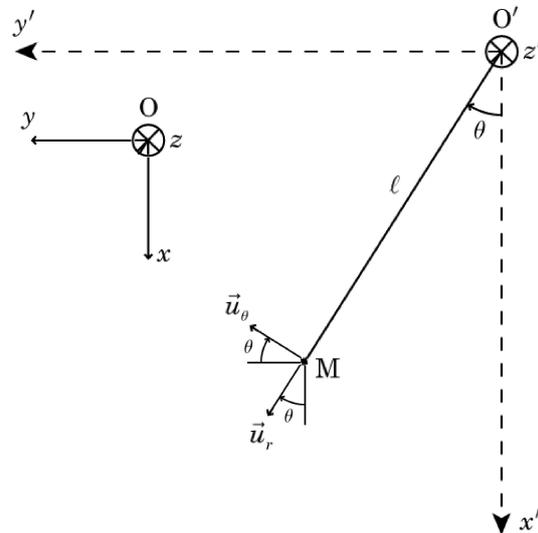
➤ tension du fil : $\vec{T} = -T_r \vec{u}_r$;

➤ force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{i,e} = -m \vec{a}_e$

où $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OO}'}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \ddot{y} \vec{u}_y = -2a \vec{u}_y \Rightarrow \vec{f}_{i,e} = 2ma \vec{u}_y$

➤ force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{i,c} = -m \vec{a}_c$

où $\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_{i,c} = \vec{0}$



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}' non galiléen s'écrit :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{i,e}$$

Or si M est à l'équilibre dans \mathcal{R}' , on a $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$.

En projetant la relation précédente selon \vec{u}_θ (car $\vec{T} \cdot \vec{u}_\theta = 0$ et \vec{T} est inconnu), on en déduit :

$$0 = -mg \sin(\theta_e) + 2ma \cos(\theta_e) \Rightarrow \tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}.$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < \theta_e < \frac{\pi}{2}$, on obtient $\theta_e = \arctan\left(\frac{2a}{g}\right) = 32^\circ$.

2. On a $\vec{r}' = l \vec{u}_r$ et $\theta \neq C^{te}$: $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}') = -l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$.

En projetant le principe fondamental de la dynamique selon \vec{u}_θ , on obtient maintenant :

$$m l \ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) + 2ma \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{2a}{l} \cos(\theta) = 0$$

On étudie de petits mouvements autour de la position d'équilibre ; on pose donc $\theta = \theta_e + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$, d'où $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$. De plus, on peut alors linéariser l'équation différentielle précédente :

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \sin(\varepsilon) + \sin(\theta_e) \cos(\varepsilon) \simeq \varepsilon \cos(\theta_e) + \sin(\theta_e) \\ \cos(\theta) = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \cos(\varepsilon) - \sin(\theta_e) \sin(\varepsilon) \simeq \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e) \end{cases}$$

$$\text{d'où } \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l} (\sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)) - \frac{2a}{l} (\cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)) = 0$$

Pour faire apparaître $\tan \theta_e$, dont on connaît l'expression, on factorise une partie de l'équation par $\cos(\theta_e)$: $\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g}{l} (\tan(\theta_e) + \varepsilon) - \frac{2a}{l} (1 - \varepsilon \tan(\theta_e)) \right) = 0$. Or $\tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}$ donc

$$\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g}{l} \left(\frac{2a}{g} + \varepsilon \right) - \frac{2a}{l} \left(1 - \varepsilon \frac{2a}{g} \right) \right) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g^2 + 4a^2}{gl} \right) \varepsilon = 0$$

Détermination de $\cos(\theta_e)$: $\frac{1}{\cos^2(\theta_e)} = 1 + \tan^2(\theta_e) = 1 + \left(\frac{2a}{g} \right)^2 = \frac{g^2 + 4a^2}{g^2} \Rightarrow \cos(\theta_e) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4a^2}}$.

Ainsi : $\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + 4a^2}}{l} \varepsilon = 0$ d'où la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{4a^2}{g^2} \right)^{\frac{1}{4}}}$

puis la période du mouvement : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{4a^2}{g^2} \right)^{-\frac{1}{4}}} = 1,85 \text{ s.}$

Exercice 4 : Manège et chaises volantes

Étude qualitative : une fois le manège en rotation et le régime permanent établi, une chaise volante donnée est en équilibre grâce à la force centrifuge, qui fait intervenir la vitesse angulaire de rotation du manège. La traduction de cet équilibre permettra ainsi d'avoir accès au nombre de tours par minute.



Référentiel : \mathcal{R}' lié au manège, non galiléen.

Système : {une chaise volante + une personne}, assimilé à un point matériel.

Repère : cf figure ci-contre.

Bilan des forces :

➤ poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y'$;

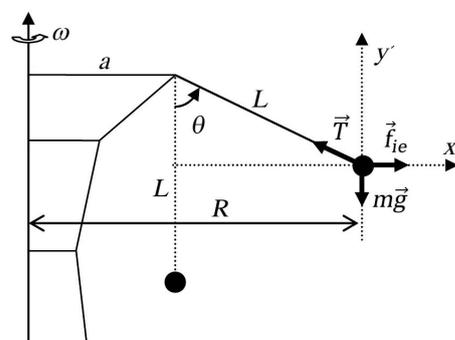
➤ tension de la chaîne :

$$\vec{T} = -\sin(\theta)\vec{e}_x' + T\cos(\theta)\vec{e}_y'$$

➤ force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) :

$$\vec{f}_{i,e} = -m\vec{a}_e = mR\omega^2\vec{e}_x'$$

➤ force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{i,c} = -m\vec{a}_c = \vec{0}$ car $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ avec $\vec{v}' = \vec{0}$ ici.



Principe Fondamental de la Dynamique : $m\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{i,e} + \vec{f}_{i,c}$

avec, à l'équilibre dans \mathcal{R}' : $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$ d'où en projection selon \vec{e}_x' et \vec{e}_y' :

$$\begin{cases} 0 = mR\omega^2 - T\sin(\theta) \\ 0 = T\cos(\theta) - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin(\theta) = mR\omega^2 \\ T\cos(\theta) = mg \end{cases}$$

d'où, en éliminant T : $\tan(\theta) = \frac{R\omega^2}{g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \tan(\theta)}{R}}$.

Détermination des valeurs numériques : vues les données, $\begin{cases} a \lesssim \frac{8\text{m}}{2} & \Rightarrow a = (3,5 \pm 0,2) \text{ m} \\ R = \frac{16\text{m}}{2} & \Rightarrow R = (8,0 \pm 0,2) \text{ m} \\ L \simeq 7\text{m} - 2\text{m} & \Rightarrow L = (5,0 \pm 0,2) \text{ m} \end{cases}$

Or $R = a + L\sin(\theta)$ donc $\sin(\theta) = \frac{R-a}{L} = 0,90 (\pm 0,07) \Rightarrow \theta \simeq 64^\circ (\pm 10^\circ)$.

Ainsi, $\omega = (1,6 \pm 0,3) \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = (15 \pm 3) \text{ tours}\cdot\text{min}^{-1}$ d'où (45 ± 9) tours en 3 minutes.

Rem. : on néglige les frottements, les phases de mise en route et d'arrêt...

Exercice 5 : Influence de la force de Coriolis au Rugby

Système : le ballon, assimilé à un point matériel (autrement dit, on ne s'intéresse qu'au mouvement de son centre de masse).

Référentiel : terrestre \mathcal{R}' , considéré comme non galiléen.

Bilan des forces : une fois lancé, le ballon est soumis à deux forces :

- le poids $m\vec{g}$;
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{i,c} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}'$ dévie le ballon vers la droite, (par exemple, vers l'ouest si le ballon est lancé vers le sud) ;

(on considère que les frottements sont négligeables, bien que ceux-ci, ainsi que l'influence du vent, doivent évidemment être pris en compte par le joueur)

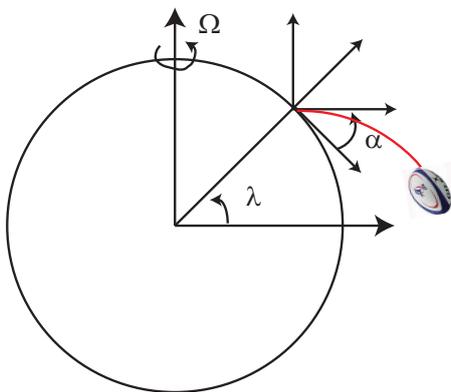
Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{f}_{i,c}$.

La résolution de cette équation donnerait accès à la trajectoire....

Mais le problème est seulement de déterminer s'il faut prendre en compte $\vec{f}_{i,c}$; pour cela, il suffit de comparer l'intensité des deux forces mises en jeu.

Lors du tir, considérons que l'angle avec la verticale du lieu est de $\alpha = 45^\circ$, pour un terrain orienté Nord-Sud à une latitude de $\lambda = 45^\circ$.

Dans ce cas, le ballon fait initialement un angle droit avec l'axe de rotation de la Terre, d'où $\vec{f}_{i,c} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}' = -2m\Omega_T v' \vec{e}_\phi$.



Prenons une vitesse de l'ordre de $20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (au début du tir, la vitesse étant alors maximum).

Le rapport entre le poids et la force de Coriolis est alors :

$$\boxed{\frac{f_{i,\text{Coriolis}}}{\text{poids}} = \frac{2m\Omega_T v_0}{mg}} \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ car } \Omega_T = \frac{2\pi}{86164} = 7,3 \times 10^{-5} \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

La force d'inertie de Coriolis est donc largement négligeable devant le poids (même avec d'autres valeurs pour λ , α , v_0 , g), en tous cas pour ce mouvement d'assez courte durée.

Note: ainsi, les joueurs n'ont pas à modifier leurs habitudes lorsqu'ils changent de latitude !

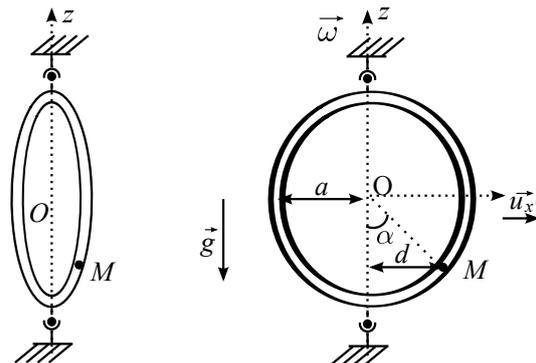
Exercice 6 : Équilibre d'une bille dans un cerceau tournant

1. Le référentiel \mathcal{R}' attaché au cerceau est non galiléen car en rotation par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} supposé galiléen, mais avec $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{C}^{te}$ et O fixe dans \mathcal{R}' et dans \mathcal{R} .

- Référentiel : \mathcal{R}' , non galiléen ;
- Système : la bille, assimilée à un point matériel M ;
- Repère : $(O, \vec{u}_x', \vec{u}_z')$ fixe dans \mathcal{R}' ;
- Bilan des forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_z \\ \vec{R} = R \cos(\alpha) \vec{u}_z - R \sin(\alpha) \vec{u}_x' \text{ (réaction du support)} \\ \vec{f}_{i,e} = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = m \omega^2 d \vec{u}_x' = \vec{f}_{centrifuge} \\ \vec{f}_{i,c} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0} \text{ si } \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0} \end{array} \right.$$

avec $d = r \sin(\pi - \alpha) = a \sin(\alpha)$ ($r = a$)



Le PFD s'écrit donc :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{i,e} + \vec{f}_{i,c} \text{ avec } \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0} \text{ à l'équilibre, d'où :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -R \sin(\alpha) + m \omega^2 a \sin(\alpha) \\ 0 = -mg + R \cos(\alpha) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\omega^2 a - \frac{R}{m}) \sin(\alpha) = 0 \\ R = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{array} \right. \Rightarrow \left(\omega^2 a - \frac{g}{\cos(\alpha)} \right) \sin(\alpha) = 0$$

On en déduit les positions d'équilibre de la bille :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,2} = 0 \text{ ou } \pi \text{ (toujours)} \\ \alpha_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right) \text{ (si } \frac{g}{a\omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{a}} \triangleq \omega_0) \end{array} \right.$$

2. L'énergie potentielle de la bille est $E_p = E_{p,pesanteur} + E_{p,centrifuge}$ dans \mathcal{R}' :

$$E_p(\alpha) = -mga \cos(\alpha) - \frac{1}{2} m \omega^2 (a \sin(\alpha))^2$$

Remarque : $E_{p,Coriolis} = C^{te} = 0$ car $\delta W'(\vec{f}_{i,c}) = \vec{f}_{i,c} \cdot d\vec{\ell}' = -2m (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} dt = 0$.

Les positions d'équilibre sont telles que $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$, soit :

$$\begin{aligned} mga \sin(\alpha) - m \omega^2 a^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= 0 \\ (g - \omega^2 a \cos(\alpha)) \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes positions d'équilibre que précédemment.

Étudions maintenant leur stabilité : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m \omega^2 a^2 (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$ d'où :

➤ en $\alpha = \alpha_1 = 0$ (ie en bas) : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(g - \omega^2 a) \begin{cases} > 0 \text{ si } \omega < \omega_0 & \text{: équilibre stable} \\ < 0 \text{ si } \omega > \omega_0 & \text{: équilibre instable} \end{cases}$

➤ en $\alpha = \alpha_2 = \pi$ (ie en haut) : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(-g - \omega^2 a) < 0$ toujours : équilibre instable.

On peut encore écrire : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m \omega^2 a^2 (1 - 2 \cos^2(\alpha))$ d'où, si $\omega \geq \omega_0$:

➤ en $\alpha = \alpha_{3,4}$: $\left(\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_{3,4}} = m \left(\omega^2 a^2 - \frac{g^2}{\omega}\right) \geq 0$: équilibre stable.

L'allure de E_p dans les différents cas étudiés est tracée sur les figures 1, 2 et 3.

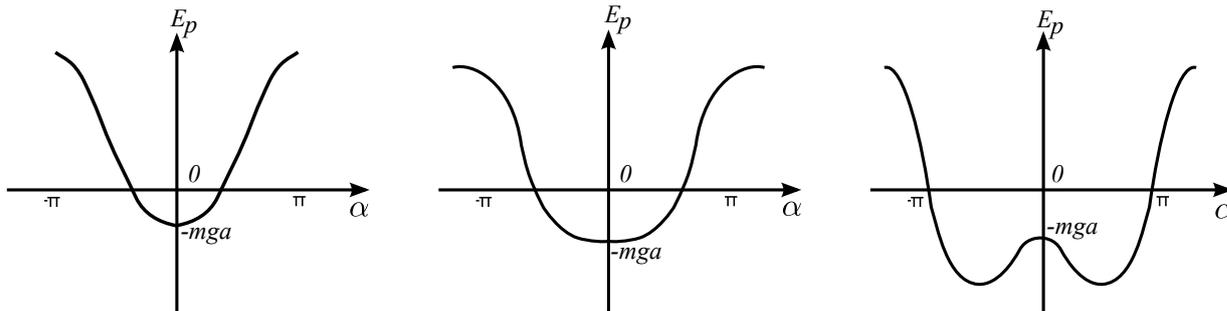


FIGURE 1 – cas où $\omega < \omega_0$. FIGURE 2 – cas où $\omega = \omega_0$. FIGURE 3 – cas où $\omega > \omega_0$.

3. Au voisinage de $\alpha = 0$, un DL à l'ordre 2 donne : $E_{p,OH}(\alpha) = -mga + \frac{(\alpha-0)^2}{2} (mga - m\omega^2 a^2)$.

Or dans \mathcal{R}' , la vitesse de la bille est $a\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha$ donc son énergie cinétique est $E'_c = \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2$.

Son énergie mécanique s'écrit donc : $E_{meca} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 - ma^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}ma^2\alpha^2 (\omega_0^2 - \omega^2) = C^{te}$ car seules des forces conservatives interviennent ici. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{\alpha} + (\omega_0^2 - \omega^2) \alpha = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, définie si $\omega < \omega_0$ ce qui est le cas au voisinage de $\alpha = 0$. On remarque que la période associée Γ augmente si ω augmente (donc si la période de rotation du cerceau diminue), et que $\Gamma \xrightarrow[\omega \rightarrow \omega_0]{} \infty$.